La bande numérique de Marie

Analyse a priori

Énoncé : Marie a une bande numérique avec les nombres de 1 à 40. Elle colorie la partie de la ligne avec les nombres 14, 15 et 16. Elle additionne ces nombres et trouve la somme 45, qui est justement l'âge de sa mère.

Pourrait-elle aussi obtenir 45 en additionnant d'autres nombres qui se suivent sur une partie de la bande numérique ?

Écris toutes les solutions et tous les calculs que tu as faits. Tu ne dois pas poser les opérations.

Domaine conceptuel : Opérations arithmétiques avec des nombres naturels

Famille de problèmes : Rechercher une somme ou une différence de nombres

Dans cette famille la tâche implique la recherche de sommes ou de différences, données comme résultats à atteindre ou contraintes à respecter. Dans la majorité des cas les nombres en présence sont des entiers naturels.

Traiter des progressions

Cette famille concerne les problèmes où interviennent des suites de nombres régulièrement espacés qu'il s'agit de définir ou compléter en fonctions de contraintes données (somme des termes, ...).

Résumé : Rechercher les suites de nombres naturels consécutifs dont la somme est 45.

Tâche de résolution :

- Lire l'énoncé et s'approprier les deux conditions "nombres qui se suivent sur le ruban" et "somme 45"
- Procéder par essais et erreurs pour trouver la solution.
- Organiser la présentation des solutions pour conclure à leur exhaustivité.

Savoirs mobilisés : Faire des additions ou utiliser la calculatrice selon les élèves.

S'organiser dans une recherche pouvant aller jusqu'à compilation de l'exhaustivité des cas

Procédure de résolution experte : Quotient euclidien et approximation par des nombres naturels

La recherche systématique et économique des solutions fait intervenir les quotients euclidiens du « nombre but »

(45) par les nombres successifs de termes à envisager : 2, 3, 4, 5, ... Dans cette situation, ces quotients peuvent trouver du sens dans un cadre purement numérique et être mis en relation avec les nombres de la suite cherchée.

Par exemple :

* pour deux termes le quotient de 45 par 2 donne 22 avec un reste de 1 qui pourra être reporté sur le deuxième nombre ;

* pour trois termes, le quotient est exact (15, reste 0), il n'y aura donc pas de reste à reporter, le 15 ne peut pas être le premier terme, mais celui du milieu

* pour quatre termes, le quotient est 11 avec un reste de 1, insuffisant pour reporter sur les trois termes suivant dans l'hypothèse où 11 serait le premier ; si on fait l'hypothèse que 10 est le premier nombre, le quotient de 45 par 10 donnerait 4 avec un reste de 5, qui ne suffit pas à être reporte sur les trois suivants (il faudrait 1 + 2 + 3 = 6) , et, dans une troisième hypothèse où 9 serait le premier nombre, le reste deviendrait 9 et serait trop grand.

Procédures envisageables par les élèves :

- Essayer des sommes d'autres groupes de 3 nombres consécutifs, constater que leur somme est plus petite ou plus grande que 45. Imaginer alors que les nombres consécutifs ne sont pas forcément au nombre de 3 (comme dans l'exemple)
- Procéder par essais, au hasard,
- Procéder par essais organisés en commençant par 2 nombres (22 et 23) en continuant par 3 (exemple), par 4 (sans solution), par 5 (7, 8, 9, 10, 11), par 6 (5, 6, 7, 8, 9, 10) par 7 et par 8 (sans solution) par 9 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) qui est la dernière solution puisque la suite commence à 1,
- Essayer d'additionner les nombres des suites commençant par 1 (ça marche), puis par 2, par 3, par 4 etc.

Obstacles : Savoir calculer de manière suffisamment rapide et juste pour que le calcul ne soit pas un obstacle à la recherche.

Erreurs relevées : Les résultats sont proposés sans que les procédures qui y ont menés soient explicitées.

Les calculs sont erronés.

Pistes de différenciation : Différenciation successive : compréhension de l'énoncé (selon les différents profils cognitifs) et mise en commun des résultats (présentation des différents niveaux d'abstraction).

Différenciation simultanée : proposition d'une calculatrice pour les élèves ayant des difficultés en calcul et d'une ou plusieurs lignes numériques physiques pour les élèves qui ont besoin de manipuler.

Exploitations didactiques : Le problème présente des potentialités pour travailler sur les écritures de sommes, sur les propriétés des opérations, les liens entre addition et multiplication, la division euclidienne. En particulier:

- Percevoir une « somme » comme un « nombre » et non plus seulement comme le résultat d'une addition et comprendre que plusieurs additions peuvent donner la même somme.
- Envisager plusieurs écritures d'un même nombre : 45 ; 14 + 15 + 16 ; 22 + 23, … et aller au-delà de l'écriture d'une addition en colonne avec les retenues.
- Appliquer les propriétés de l'addition, en particulier l'associativité et la commutativité dans les sommes de plus de deux termes : 7 + 8 + 9 + 10 + 11 peut s'associer en (9 + 11) + 10 + (7 + 8) pour permettre d'effectuer mentalement les approximations 20 + 10 + 15.
- Transformer une somme en un produit (lien fondamental entre addition et multiplication et distributivité) : après avoir décomposé, mentalement, 14 + 15 + 16 en (15 – 1) + 15 + (15 + 1), passer par associativité et commutativité à (15 + 15 + 15) + (1 – 1) = 3 x 15.
- Connaissant la somme de plusieurs termes proches, estimer l'un des termes par division ou (multiplication lacunaire) approchée ou par division euclidienne : si 45 était la somme de 6 nombres consécutifs, ces nombres devraient être proches de 7 car 45 = 6 x 7 + 3

Pour aller plus loin : Il paraît opportun de vaincre certaines habitudes ou automatismes consistant à appliquer immédiatement une procédure de calcul algorithmique, ou à utiliser la calculatrice. On pourra avec profit revenir sur le calcul en ligne et les propriétés de l'addition et de la multiplication dans N (l'ensemble des nombres naturels).

Références sitographiques : http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=op9-fr&flag=1&langue=fr&enonce=11rmtf_fr-2&w=0

La bande numérique de Marie

Proposition de mise en oeuvre

Séance 1 : phase de recherche

Présentation du problème
Passation de la consigne
10mn

Distribuer de l'énoncé écrit du problème avec la consigne : « Entoure au crayon gris les informations qui te paraissent importantes et indique en dessous en quoi elles sont importantes. Envisage les procédures que tu vas mettre en œuvre pour résoudre ce problème. »

Laisser les élèves réfléchir individuellement pendant 5 minutes.

Mettre en commun la première partie de la consigne (détermination des éléments importants et justification de ses choix). L'énoncé est reproduit au TNI ainsi qu'une ligne numérique. Collectivement, on coloriera la bande numérique comme décrit dans l'énoncé. On insistera et on surlignera au tableau les indicateurs de la tâche à réaliser : trouver 45, écrire **toutes** les solutions, expliciter ses procédures, ne pas poser les opérations. Ce qu'on illustrera en vérifiant que 14+15+16=45 à l'aide d'un arbre à calcul : (15-1)+(15)+(15+1) = (15+15+15)+(1-1).

Entrée dans la tâche
Soutien de l'activité

Travail individuel.

Prendre à part les élèves qui n'ont rien produit ou produit un travail erroné lors de la compréhension de l'énoncé pour les aider à entrer dans la tâche.

Tâche initiale
Terme de l'activité
15mn

Les élèves sont en recherche individuelle. Le terme de cette partie de l'activité correspond au moment où tous les élèves sont entrés dans la recherche et ont trouvé qu'il va falloir chercher d'autres solutions que les additions de trois termes.

Bilan collectif outillant pour l'élève
Mutualisation
10mn

Lors de la mutualisation, il s'agira :

- de rappeler l'enjeu et les contraintes (des sommes égales à 45 et des entiers inférieurs ou égal à 40) ; interdiction d'utiliser l'algorithme de l'addition posée.
- de confirmer la nécessité de d'ouvrir la recherche à des sommes de plus de trois termes.
- d'introduire la nécessité de trouver une méthode pour s'assurer de l'exhaustivité des solutions

Il s'agira aussi de montrer quelques procédures pouvant servir à la recherche, par exemple l'élimination par approximation. Est-ce que la suite 38+39+40 paraît une solution ? Non, car on voit sans le calcul qu'elle est équivalente à un nombre supérieur à 45 . De même pour la suite 1+2+3 qui sera visiblement inférieure à 45.

Retour en tâche
Réinvestissement
20mn+10mn

Proposer aux élèves de retourner à leur recherche mais cette fois collectivement dans leur îlot. Continuer d'accompagner les élèves non autonomes. Au bout de 20 minutes, proposer aux élèves de présenter leurs solutions sur une affiche pour pouvoir l'exposer à la classe avec la consigne de mettre en évidence la justification qui les poussent à assurer qu'ils ont trouvé toutes les solutions.

Décontextua--lisation
Sortie de séance
15mn

Les groupes passent (par ordre du niveau croissant d'abstraction) pour montrer leurs résultats.
Les solutions sont les suivantes :
22+23
14+15+16
7+8+9+10+11
5+6+7+8+9+10
1+2+3+4+5+6+7+8+9
Justification de l'exhaustivité : la première somme a nécessairement deux termes ; on a essayé toutes les suites avec un nombre croissant de termes. La suite commençant par 1 est nécessairement la dernière suite car si on commence par 2, le nombre correspondant sera plus grand que 45, de même si on ajoute un terme.
Si la justification n'est pas fournie par les élèves, l'enseignant.e l'amènera tout en proposant la présentation ci-dessus. Ce sera le moment de souligner qu'en mathématiques, la présentation des résultats est importante et fait partie de la résolution.

Séance 2 : narration

Remise en mémoire	Collectivement, les élèves rappellent la tâche demandée la veille, sans faire part des procédures.
Narration orale en diade	Puis par deux, les élèves jouent « au journaliste » : l'un tient le micro tandis que l'autre lui raconte. La consigne est « Vous allez jouer au journaliste. L'un d'entre vous tiendra le micro tandis que l'autre devra lui raconter comment il a fait pour résoudre le problème. Il faudra parler des difficultés rencontrées et de la manière dont vous vous êtes pris pour les surmonter. Si vous n'avez pas trouvé la solution, expliquez quand même ce que vous avez fait et comment vous vous êtes rendu compte que ce n'était pas la bonne solution. » Cet exercice n'étant ni facile, ni habituel, ne pas hésiter à reformuler, à utiliser des périphrases mais surtout de s'assurer que tout le monde en ait compris l'enjeu. On laissera le temps nécessaire pour que chacun puisse enregistrer tout ce qu'il a à dire.
Narration écrite individuelle	Consigne: « Vous allez maintenant écrire individuellement ce que vous venez de dire »

La bande numérique de Marie

Prénom
____

Énoncé : Marie a une bande numérique avec les nombres de 1 à 40. Elle colorie la partie de la ligne avec les nombres 14, 15 et 16. Elle additionne ces nombres et trouve la somme 45, qui est justement l'âge de sa mère.

Pourrait-elle aussi obtenir 45 en additionnant d'autres nombres qui se suivent sur une partie de la bande numérique ?

Écris toutes les solutions et tous les calculs que tu as faits. Tu ne dois pas poser les opérations.

Ce que je vais faire pour trouver la solution ?

Ma recherche
(écrite au stylo bille, pas de stylo plume, pas de crayon gris, pas de blanco, pas d'effaceur). J'ai le droit d'utiliser le recto et le verso de la feuille de recherche et d'en demander d'autres si nécessaire. J'écris mon prénom sur chacune des feuilles de recherche et je les numérote.

Présentation de ma réponse

Prénom : …...............................

Feuille de recherche

Autres problèmes du même domaine et de la même famille

Bougres d'ânes

Léon a gardé les bougies de ses gâteaux d'anniversaire depuis l'âge de 1 an jusqu'à aujourd'hui. Chaque année toutes les bougies du gâteau étaient neuves.

Léon possède actuellement 91 bougies.

Quel âge a-t-il ?

Notez comment vous avez trouvé l'âge de Léon.

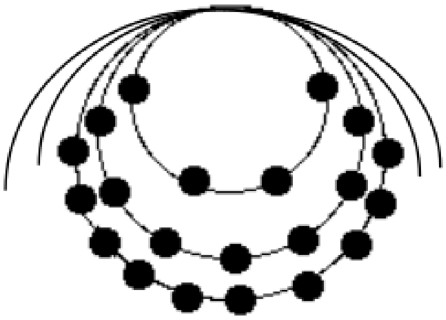
Le collier de perles

La Reine Michèle possède un collier de 7 rangs de perles.

Le premier rang compte 4 perles, le deuxième rang a 7 perles, le troisième en a 10, et ainsi de suite. A partir du deuxième, chaque rang a trois perles de plus que le précédent.

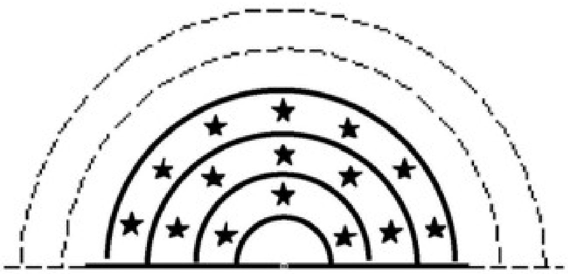
En tout, combien y a-t-il de perles dans le collier ?

Expliquez pourquoi.



L'éventail de Julie

Julie a un éventail construit avec 20 bandes en papier couleur. Elle désire l'embellir avec de petites étoiles. Sur la première bande, la plus petite, elle colle 3 étoiles ; sur la deuxième 5, sur la troisième 7. Elle continue en collant sur chaque bande deux étoiles de plus que sur la précédente, jusqu'à la dernière bande.



Combien de petites étoiles Julie va-t-elle coller sur la vingtième bande ?

Combien de petites étoiles doit-elle coller sur tout l'éventail ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Le ruban de Marianne

Marianne s'est construit un bien joli ruban des nombres de 1 à 9 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Mais Luc lui a pris deux nombres, qu'il a découpés dans son ruban.
Marianne est très mécontente car ce qui reste de son ruban est maintenant en deux parties.
Mais elle se console en se disant : si j'additionne les nombres de chaque partie, les deux sommes sont égales.

Quels nombres Luc a-t-il pris dans le ruban de Marianne ?

Justifiez votre réponse.

Le livre de Jean

Jean doit lire un livre de 105 pages pour s'entraîner à la lecture.
Il décide de lire un peu chaque jour, sauf le mercredi car il va à la piscine, et le dimanche car il se repose.
Jean commence un lundi par lire une page, le lendemain, mardi, il lit deux pages puis, le jeudi, il lit une page de plus que le mardi, et ainsi de suite, il lit chaque fois une page de plus que le nombre de pages lues la fois précédente.

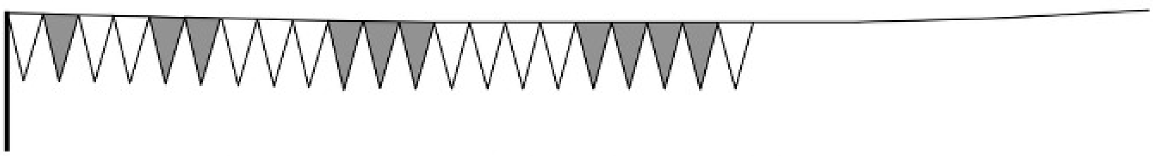
Quel jour Jean aura-t-il fini de lire son livre : un lundi, un mardi, un jeudi, un vendredi ou un samedi ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Les drapeaux de Nicolas

Nicolas construit une guirlande avec des petits drapeaux jaunes et des petits drapeaux bleus, tous de la même forme et de la même grandeur, placés sur un fil les uns à côté à côté des autres.
Il commence à un bout du fil par un drapeau jaune, puis place un drapeau bleu à côté.
Il continue par deux drapeaux jaunes et deux drapeaux bleus, puis par trois drapeaux jaunes et trois drapeaux bleus, et ainsi de suite.

Voici le dessin du début de sa guirlande alors qu'il est en train de placer les cinq drapeaux jaunes après avoir placé les quatre bleus :



(Sur ce dessin, les drapeaux jaunes sont en blanc et les drapeaux bleus sont en gris.)

Lorsqu'il arrive au bout de la guirlande, il constate qu'il a pu placer exactement 100 drapeaux.

Combien de drapeaux de chaque couleur Nicolas a-t-il placés sur son fil ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.